УДК 519.6

НЕЛИНЕЙНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕЛА КРЫЛА

© Т.А. Хромова

Аннотация. Представлена нелинейная математическая модель обтекания крыла потоком, с учетом трения. В результате численного эксперимента были получены аэродинамические характеристики в широком диапазоне углов атаки, которые согласуются с теоретическими расчетами.
Ключевые слова: метод дискретных вихрей; трехмерный турбулентный пограничный слой; гипотеза Прандтля; система уравнений Навье–Стокса

В настоящей работе моделирование обтекания крыла основано на гипотезе Прандтля с помощью совмещения нелинейного вычисления невязкого потока интегральным методом расчета, учитывая слой трения. Это дает возможность изучить обтекание крыла до нестационарных размеров.

1. Постановка задачи. При математическом моделировании обтекания тела крыла [1] поток делится на две области: область не связанного потока и область вязкого потока.

2. Расчет времени вида крыла. Из решения внешнего потока в любой расчетный период существует разделение скорости в верхней плоскости крыла. Затем происходит выравнивание линий тока от линии распространения до точек разделения.

Единые связи получаются путем интегрирования равенств пограничного слоя по координате n, измеренной в направлении, перпендикулярном обтекаемой поверхности. Два интегральных уравнения импульса, связанных с протеканием тока внешнего потока, одно в главном направлении вдоль оси s, а другое в поперечном направлении r, можно свести к системе двух дифференциальных уравнений первого порядка производных [2], если установить профиль скорости в направлении основного потока как зависимость мощности, профиль скорости вторичного потока примет форму профиля Магера и рассчитает коэффициент трения, используя формулу, полученную из экспериментальных данных, и обобщит формулу Людвига–Тилмана на трехмерных пограничных слоях с градиентом давления.

Для закрытия системы используется уравнение, которое получается исходя из предположения, что толщина пограничного слоя увеличивается в результате смешивания газа из невязкой области в область турбулентного потока. Уравнения, полученные в этом случае, выделяются из фиксированной системы координат в действии.

Благодаря решению уравнений слой затрат ε_{11}^{**}, граничный слой образуют параметр H, равный отношению толщины экструзии к толщине импульсных потерь и тангенсу угла α_ω линии ограничения тока ($\varepsilon_N = \mathrm{tg}\alpha_\omega$).

Граничные условия для расчета пограничного слоя задаются на прямом распространении и на совпадающей поверхности крыла. На линии растяжения для определения ε_{11}^{**} и H можно использовать профиль скорости в пограничном слое, полученный точным решением уравнений Навье–Стокса для потока вблизи критической точки [3], и ε_ω равен нулю, поскольку профиль скорости на линии распространения еще не успел деформироваться в поперечном направлении. Граничные условия на плоскости симметрии для решения уравнений трехмерного пограничного слоя получаются из расчета двумерного пограничного слоя вдоль корневого пояса, для которого используются уравнения, записанные для двумерного пограничного слоя [4].

Расчет осуществляется вдоль всех построенных линий тока до точки схода потока с задней боковой кромки крыла до наступления отрыва пограничного слоя. Отрыв трехмерного пограничного слоя существует двух типов [5]. К первому типу относится отрыв, когда становится предельно малым коэффициент поверхностного трения ($c_f \to 0$), предельно большой одна из производных $\partial H/\partial s \partial\varepsilon_{11}^{**}/\partial s$, несмотря на то, что $c_f \neq 0$. В численном решении это соответствует достижению значений форм параметра $H = 2{,}2 \div 2{,}6$ [6–7]. Другой тип отрыва имеет место при конечных c_f, $\partial\delta_{11}^{**}/\partial s$ в случае, когда угол $\alpha_\omega + x_e \geq 90^\circ - \chi_\text{М}$ (x_e – угол между направлением линии тока невязкого течения и осью Оx, $\chi_\text{М}$ – местный угол стреловидности участка крыла), то есть когда пограничный слой становится направленным вдоль размаха крыла.

3. Нахождение и моделирование состояния направления отрыва. Отделение пограничного слоя моделируется спуском с поверхности крыла вихревого листа. Он состоит из дискретных вихревых сегментов, которые поступают в поток из узловых точек схемы вихревого крыла, ближайших огибающих точек отрыва, полученных из расчета пограничного слоя. Интенсивность свободного вихревого слоя считается равной потоку завихренности в сечении отрыва пограничного слоя [8], в этом случае получается

$$\gamma = \int_0^\delta V\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{\partial \vartheta}{\partial s}\right) dn,$$

где V – модуль скорости в пограничном слое; ϑ – скорость по координате n; u – по координате s.

Полагая, что условия в потоке и на поверхности крыла в промежутке времени $\Delta\tau$ остаются неизменными, циркуляцию дискретных вихрей, моделирующих оторвавшуюся вихревую пелену, можно считать равной потоку завихренности, попадающему в область невязкого течения из пограничного слоя в месте отрыва за отрезок времени $\Delta\tau$:

$$\delta^{(2)r} = \gamma\Delta\tau = \Delta\tau\int_0^\delta V(\frac{\partial u}{\partial n}-\frac{\partial \vartheta}{\partial s})V dn.$$

Поскольку в интегральных методах расчета пограничного слоя υ не рассчитывается, и известно, что в большей части пограничного слоя она значительно меньше продольной скорости u, а ее производная $\partial\upsilon/\partial s$ меньше производной $\partial u/\partial n$, то

$$\gamma = \int_0^\delta u\frac{\partial u}{\partial n}dn = \frac{u_e^2}{2}.$$

Но при приближении к точке отрыва скорость υ и производная $\partial u/\partial s$ резко возрастают, и в точке отрыва значение υ становится соизмеримым с продольной скоростью u. Как показали расчеты пограничного слоя конечно-разностными методами, в сечении отрыва величина скорости υ составляет 11–14 % от продольной скорости u [9]. Следовательно, интенсивность γ вихревой пелены получается несколько меньшей, что учитывается введением коэффициента ε, а

$$\delta^{(2)r} = \varepsilon\frac{\Delta\tau(u_e^r)2}{2}.$$

Коэффициент ε также учитывает наличие зоны противотока за точкой разделения и выбирается в диапазоне 0,8–0,9.

Достаточно большое значение скорости υ в отрывном сечении приводит к движению свободного вихря $\delta^{(2)r}$, не касающемуся поверхности $\frac{u}{v}$, что существенно воздействует на динамические характеристики в окрестности точки отрыва и ее состояние.

Для того чтобы установить скорость смещения прерывистого вихря $\delta^{(2)r}$ в течение периода разделения, очень важно определить положение центра, который отделен от поверхности крыла толщиной смещения δ_1^*. Учитывая профиль скорости центрального тока в пограничной среде и принимая во внимание вычисление значимости параметра формы для параметра H, можно определить скорость отсоединенного вихря $\delta^{(2)r}$:

$$u_{\varepsilon_1^*}=u_e\left(\frac{\delta_1^*}{\delta}\right)^{\frac{H-1}{2}}=u_e\left(\frac{H-1}{H+1}\right)^{\frac{H-1}{2}}.$$

Последующее движение потока, а также прерывистых вихрей концентрированной дымки осуществляется в соответствии с вектором региональной скорости струи, рассчитанным за любой расчетный период периода r в абсолютно всех основных местах независимого вихря [10–11]. Предстоящее движение системных вихрей такое же, как и движение дискретных вихрей концентрированной и вторичной мутности, выполняемое по вектору локальной скорости потока, рассчитанному в любом рассчитанном эпизоде r во всех узловых точках мутности свободного вихря.

Таким образом, информация, представленная в соответствии с окончательными данными, демонстрирует, что моделирование состояния направления разделения в соответствии с описанной технологией позволяет надежно получить его аэродинамические характеристики в широком диапазоне углов атаки.

Список литературы

1. *Будак В.П.* Методы решения уравнения переноса излучения. М.: Изд. дом МЭИ, 2007. 51 с.
2. *Ващенко Г.В.* Вычислительная математика. Основы алгебраической и тригонометричесой интерполяции. Красноярск: СибГТУ, 2008. 64 с.
3. *Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.* Численные методы, параллельные вычисления и информационные технологии. М.: Изд-во Москов. ун-та, 2008. 310 с.
4. Численные методы / под ред. У.Г. Пирумова. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2018. 421 с.
5. *Зенков А.В.* Численные методы. М.: Юрайт, 2018. 22 с.
6. *Ализняк В.Е.* Численные методы. Основы научных вычислений. М.: Юрайт, 2017. 356 с.
7. *Алексеев Г.В.* Численные методы при моделировании технологических машин и оборудования. СПб.: Гиорд, 2014. 200 с.
8. *Логачев И.Н., Логачев К.И.* Аэродинамические основы аспирации. СПб.: Химиздат, 2005. 659 с.
9. *Артемов О.А.* Прямоточные воздушно-реактивные двигатели (расчет характеристик). М.: Компания Спутник+, 2006. 374 с.
10. *Карман Т.* Аэродинамика. Ижевск, 2001. 209 с.

11. *Липницкий Ю.М.* Нестационарная аэродинамика баллистического полета. М.: Физматлит, 2003. 176 с.

Поступила в редакцию 09.04.2019 г.
Отрецензирована 25.04.2019 г.
Принята в печать 14.05.2019 г.

Информация об авторе:
Хромова Татьяна Александровна – магистрант по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: tatyanka.xromova96@mail.ru

NONLINEAR MATHEMATICAL MODEL OF WING BODY
Khromova T.A., Master's Degree Student in "Applied Mathematics and Informatics" Programme. Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: tatyanka.xromova96@mail.ru
Abstract. We present the nonlinear mathematical model of flow past wing with friction. As a result of a numerical experiment, we obtain aerodynamic characteristics in a wide range of angles of attack, which are consistent with theoretical calculations.
Keywords: discrete vortex method; three-dimensional turbulent boundary layer; Prandtl hypothesis; Navier–Stokes equations

Received 9 April 2019
Reviewed 25 April 2019
Accepted for press 14 May 2019